

## Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательно краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставаемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф.м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф.м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохри-ну (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
в 2015–2016 учебном году  
11 класс**

*Время выполнения заданий — 4 часа*

**11.1.** Приведённый квадратный трёхчлен  $y = x^2 + ax + b$  имеет корнями действительные числа  $t$  и  $s$  причём  $-1 < t < 0$ . Докажите, что если прибавить к коэффициентам  $a$  и  $b$  корень  $t$ , то полученный трёхчлен также будет иметь два различных действительных корня.

**Решение:** По теореме Виета  $b = t \cdot s$ ,  $a = -t - s$ . Тогда полученный трёхчлен имеет вид  $g(x) = x^2 + (a+t)x + (b+t) = x^2 - sx + st + t$ . Его дискриминант равен  $D = s^2 - 4st - 4t = (s - 2t)^2 - 4t(1+t) \geq -4t(1+t)$ . Так как  $-1 < t < 0$ , то  $-4t(1+t) > 0$ , значит дискриминант нового квадратного трёхчлена положителен, что доказывает утверждение задачи.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                          | баллы          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Верное доказательство                                                                                  | 7 баллов       |
| Верно выписан дискриминант нового трёхчлена (через две переменные), но не доказана его положительность | 4 балла        |
| Указана связь между числами $a$ , $b$ , $t$ и $s$ (теорема Виета или формулы корней)                   | 1 балл         |
| Утверждение проиллюстрировано на примерах                                                              | 0 баллов       |
| Любые выкладки, не ведущие к доказательству                                                            | не оцениваются |

**11.2.** Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — плоские углы трёхгранного угла. Докажите, что числа  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\sin \frac{\beta}{2}$  и  $\sin \frac{\gamma}{2}$  являются длинами сторон некоторого треугольника.

**Решение:** Пусть вершина угла — точка  $O$ . Отложим на всех рёбрах данного трёхгранного угла равные отрезки  $OA = OB = OC = 1/2$  и рассмотрим тетраэдр  $OABC$ . Из треугольников, образующих его боковые грани, легко (например, по теореме косинусов) находятся отрезки  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$ . Эти отрезки оказываются равными  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\sin \frac{\beta}{2}$  и  $\sin \frac{\gamma}{2}$ . Из них составлен треугольник  $ABC$ . Утверждение доказано.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                                     | баллы          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Верное доказательство                                                                                             | 7 баллов       |
| В принципиально верном доказательстве имеются арифметические или тригонометрические погрешности                   | 6 баллов       |
| Имеется идея (не реализованная) получить треугольник с длинами сторон, пропорциональными синусам половинных углов | 2 балла        |
| Утверждение проиллюстрировано на примерах                                                                         | 0 баллов       |
| Любые рассуждения, не ведущие к решению                                                                           | не оцениваются |

**11.3.** Все 100 натуральных чисел от 2 до 101 разбили на две группы по 50 чисел в каждой. Числа в каждой группе перемножили, и два полученных произведения сложили. Докажите, что эта сумма — составное число.

**Решение:** Заметим, что в результате описанного действия всегда получится натуральное число, большее 101. Возможны два случая.

1) В каждой группе есть чётное число. Тогда произведение чисел в каждой из групп чётно, как и сумма этих произведений. Чётное число, большее 2 — составное, утверждение в этом случае доказано.

2) Все чётные числа попали в одну группу. Тогда (так как в наборе чётных чисел ровно 50) одна из групп содержит все чётные числа, вторая — все нечётные. В каждой группе, следовательно есть числа, кратные 3 (можно аналогично рассуждать с делимостью на 5, 7, и т. д.); тогда каждое из произведений, также как и их сумма тоже делится на 3. Натуральное число, большее 3 и делящееся на 3 — составное. Утверждение доказано и в этом случае тоже.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                          | баллы    |
|------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верное доказательство                                                  | 7 баллов |
| В приведённом доказательстве не рассмотрен принципиально важный случай | 3 балла  |
| Утверждение проиллюстрировано на примерах                              | 0 баллов |

**11.4.** Решите уравнение  $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} = 3^{-x} + 4^{-y}$ .

**Решение:** Область допустимых значений уравнения определяется двумя условиями:  $xy \geq 0$  и  $x + y \geq 0$ . Из первого условия следует, что либо среди чисел  $x$  и  $y$  есть число 0, либо эти два числа одного знака. Из второго условия видно, что случай, когда они оба отрицательны, невозможен; также невозможен случай, когда одно из чисел отрицательно, а второе равно нулю. Значит  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$ . Тогда  $3^{-x} \leq 3^0 = 1$ ,  $4^{-y} \leq 4^0 = 1$ , и  $3^{-x} + 4^{-y} \leq 2$ , причём равенство достигается только при  $x = y = 0$ . С другой стороны,  $xy \geq 0$ , поэтому  $2^{\sqrt{xy}} \geq 2^0 = 1$ . Также  $5^{\sqrt{x+y}} \geq 5^0 = 1$ , значит,  $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} \geq 2$ . Таким образом, левая часть данного

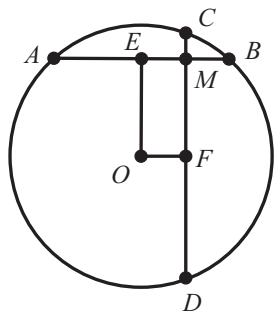
уравнения не меньше двух, а правая — не больше двух. Тогда они обе равны 2, что достигается при  $x = y = 0$ , и только при таком условии.

**Ответ:** (0; 0).

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                                                                                                                                                                                 | баллы          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Верный обоснованный ответ                                                                                                                                                                                                                                     | 7 баллов       |
| Ход решения верен, но какие-то из неравенств, либо а), либо б) либо ОДЗ, ошибочно записаны, как строгие; с учётом этого сделан вывод об отсутствии решений неравенства                                                                                        | 6 баллов       |
| Доказаны два неравенства а) $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} \geq 2$ и б) $3^{-x} + 4^{-y} \leq 2$ , но при этом либо сделан неверный вывод, что неравенство решений не имеет, либо не обосновано, что равенство достигается в единственном случае $x = y = 0$ | 5 баллов       |
| Доказано одно из двух неравенств а) или б) предыдущего пункта                                                                                                                                                                                                 | 3 балла        |
| Верно найдена только ОДЗ уравнения                                                                                                                                                                                                                            | 1 балл         |
| Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)                                                                                                                                                                                                        | 0 баллов       |
| Любые выкладки, не ведущие к решению                                                                                                                                                                                                                          | не оцениваются |

**11.5.** Через точку  $M$  внутри круга радиуса  $r$  с центром в точке  $O$  провели две перпендикулярные хорды. Известно, что сумма квадратов длин этих хорд равна  $m^2$ . Найдите длину отрезка  $OM$ .



К решению задачи 11.5

**Решение:** Обозначим проведённые хорды как  $AB$  и  $CD$  и опустим на них перпендикуляры  $OE$  и  $OF$  соответственно (см. рисунок). Четырёхугольник  $OEMF$  является прямоугольником, поэтому выполняется равенство  $OM = \sqrt{OE^2 + OF^2}$ . Точка  $E$  — середина хорды  $AB$  и из треугольника  $AOE$  по теореме Пифагора  $AB = 2AE = 2\sqrt{r^2 - OE^2}$ . Отсюда  $OE^2 = r^2 - 0,25AB^2$ . Аналогично получаем  $OF^2 = r^2 - 0,25CD^2$ , значит,

$$OM = \sqrt{OE^2 + OF^2} = \sqrt{r^2 - 0,25AB^2 + r^2 - 0,25CD^2} = \sqrt{2r^2 - 0,25m^2}.$$

Задача решена.

**Ответ:**  $OM = \sqrt{2r^2 - 0,25m^2}$ .

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                                                                                         | баллы    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верный обоснованный ответ                                                                                                                                             | 7 баллов |
| Ход решения верен, но получен неверный ответ только из-за арифметических ошибок                                                                                       | 6 баллов |
| Условие задачи верно записано в алгебраической форме (через векторы, координаты, тригонометрические функции и т. п.), но получившаяся алгебраическая задача не решена | 3 балла  |
| Рассмотрен только частный случай, когда хотя бы одна из хорд является диаметром                                                                                       | 2 балла  |
| Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)                                                                                                                | 1 балл   |

**11.6.** На заводе работают ровно 217 женщин, среди которых 17 брюнеток, а остальные 200 — блондинки. Перед Новым Годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала в «Контакте» фамилии ровно 200 женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 13 блондинок.

**Решение:** По условию задачи верный список всех 200 блондинок будет в «Контакте» ровно у 17 сотрудниц завода: брюнетки напишут именно его, а блондинка его не напишет никогда, так как в противном случае она должна была бы указать в нём и себя. Значит, если некоторый список встречается не 17 раз, а любое другое количество, то он неверный, и его составила блондинка. Уберём все списки, которые встречаются ровно 17 раз. Останется  $217 - 17n$  списков.  $217 - 17n \geq 0$ , поэтому  $n \leq 12$  (мы помним, что  $n$  — число натуральное). Тогда осталось не менее  $217 - 12 \cdot 17 = 13$  списков, и мы вычислили не менее 13 их авторов-блондинок.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                        | баллы          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Верное доказательство                                                                                | 7 баллов       |
| Обосновано, что верный список блондинок встречается ровно в 17 списках (без дальнейшего продвижения) | 4 балла        |
| Обосновано, что верный список блондинок встречается хотя бы 17 раз (без дальнейшего продвижения)     | 2 балла        |
| Имеется только идея определять блондинок, как авторов неверных списков                               | 1 балл         |
| Любые идеи, не ведущие к доказательству                                                              | не оцениваются |